

PROFIL KEMAMPUAN PEMBUKTIAN MATEMATIS MAHASISWA DALAM MATA KULIAH ALJABAR ABSTRAK

Novyta

Sekolah Tinggi Keguruan dan Ilmu Pendidikan Media Nusantara Citra, Jl. Raya Panjang, Komplek
Green Garden Blok Z III, Jakarta

Email: novyta@stkipmnc.ac.id

Abstract

This research aims to examine the profile of the mathematical proving ability of students in Abstract Algebra courses. The method of this research is included in this type of descriptive research. The subjects of this study were 3 students who studied Abstract Algebra courses from the high, medium and low mathematical proofing ability group. The results showed that students with high ability and are having the ability to read mathematical proofs and perform mathematical proofs. As for the ability to criticize proof by adding, reducing or reconstituted a mathematical proof for each group of students is still not visible.

Keywords: *Mathematical Proving Ability, Abstract Algebra*

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji profil kemampuan pembuktian matematis dari mahasiswa pada mata kuliah Aljabar Abstrak. Metode dari penelitian ini adalah termasuk dalam jenis penelitian deskriptif. Subjek dari penelitian ini adalah 3 orang mahasiswa yang belajar mata kuliah Aljabar Abstrak dari kelompok kemampuan pembuktian matematis tinggi, sedang dan rendah. Hasil penelitian menunjukkan bahwa mahasiswa dengan kemampuan tinggi dan sedang memiliki kemampuan membaca pembuktian matematis dan melakukan pembuktian matematis. Sedangkan untuk kemampuan mengkritik pembuktian dengan menambah, mengurangi atau menyusun kembali suatu pembuktian matematis untuk tiap kelompok mahasiswa masih belum nampak.

Kata Kunci: Kemampuan Pembuktian Matematis, Aljabar Abstrak

PENDAHULUAN

Matematika adalah ilmu yang abstrak. Pada tingkat sekolah dasar, pembelajaran matematika disajikan secara konkrit agar peserta didik memahami konsep yang diberikan. Sebagai contoh, untuk mengenalkan konsep penjumlahan bilangan, guru menggunakan media konkrit seperti lidi ataupun sedotan dan mengajak siswa terlibat dalam proses perhitungan tersebut. Sementara itu, di tingkat sekolah menengah, pembelajaran matematika sudah dikenalkan dengan konsep yang abstrak seperti dalam materi aljabar. Siswa sudah diarahkan dari pengetahuan konkrit menjadi bentuk abstrak. Sebagai contoh, dalam materi aljabar, siswa diajarkan konsep operasi penjumlahan untuk bilangan yang memiliki variabel yang sama dapat dilakukan operasi penjumlahan, sementara untuk variabel yang berbeda tidak dapat dilakukan operasi penjumlahan. Dalam mengajarkan konsep ini, guru dapat memberikan contoh konkrit dengan memisalkan variabel-variabel menjadi sebuah benda, selanjutnya guru menggiring siswa untuk memisalkan benda tersebut sebagai variabel,

sehingga pada akhirnya siswa mendapatkan pengetahuan terhadap konsep yang diberikan oleh guru.

Pembelajaran Aljabar di Perguruan Tinggi diberikan dalam beberapa mata kuliah. Salah satu diantaranya adalah mata kuliah Aljabar Abstrak. Mata kuliah ini adalah mata kuliah yang wajib diikuti oleh seluruh mahasiswa program studi matematika dan Pendidikan matematika seluruh Indonesia. Mata kuliah ini menuntut mahasiswa untuk dapat membuktikan teorema ataupun pernyataan matematis berkaitan dengan konsep yang diberikan pada setiap pertemuan.

Masalah yang terjadi adalah, kemampuan pembuktian matematis mahasiswa masih belum sesuai dengan harapan. Kemampuan pembuktian matematis adalah kemampuan mahasiswa dalam membuktikan kebenaran dari pernyataan matematika secara matematis berdasarkan definisi, prinsip dan teorema (Lestari, 2015). Berdasarkan observasi peneliti yang dilakukan pada mata kuliah sebelumnya, masih banyak ditemui kesalahan prosedural dalam membuktikan pernyataan matematis seperti terlihat pada Gambar 1 berikut.

③ Prove that $3 + 11 + \dots + (8n-5) = 4n^2 - n$ for all $n \in \mathbb{N}$
 Boleh :
 $P(n) = 3 + 11 + \dots + (8n-5) = 4n^2 - n$
 (1) $P(1) : (8 \cdot 1 - 5) = 4(1^2 - 1)$
 $8 - 5 = 4 - 1$
 $3 = 3$ benar ✓ $P(1)$ benar
 (2) - andaikan $P(k)$ benar $\rightarrow 3 + 11 + \dots + (8k-5) = 4k^2 - k$
 - andaikan $P(k+1)$ benar $\rightarrow 3 + 11 + \dots + (8k-5) + (8(k+1)-5) = 4(k+1)^2 - (k+1)$
 ~~$4k^2 - k + 8k + 8 - 5 = 4k^2 + 7k + 3 = 4(k+1)^2 - (k+1)$~~
 ~~$4k^2 + 7k + 3 = 4(k^2 + 2k + 1) - (k+1)$~~
 ~~$4k^2 + 7k + 3 = 4k^2 + 8k + 4 - k - 1 = 4k^2 + 6k + 3 = 4(k+1)^2 - (k+1)$~~
 diperhatikan :
 ~~$3 + 11 + \dots + (8k-5) = 4k^2 - k$~~
 lanjutkan langkah, analisis ke bentuk $P(k+1)$
 diperoleh $P(k+1)$ benar
 karena $P(1)$ benar, $P(k)$ benar mengakibatkan $P(k+1)$ benar.
 Terbukti ✗

Gambar 1. Jawaban Mahasiswa dalam Membuktikan Pernyataan Matematis

Gambar 1 memperlihatkan bahwa mahasiswa masih mengalami kesalahan prosedural dalam melakukan pembuktian dengan induksi matematika. Mahasiswa cenderung menyamakan ruas kiri dengan ruas kanan. Padahal alur pembuktian yang diharapkan dari proses pembuktian adalah bagaimana mengarahkan dari bentuk yang diasumsikan benar menuju ke bentuk yang akan dibuktikan kebenarannya.

Kemampuan pembuktian matematis sangat penting dimiliki mahasiswa matematika. Hal ini dikarenakan pada tingkat Pendidikan Tinggi, pembelajaran matematika bukan lagi penerapan rumus, melainkan sudah ke tahap pembuktian dari suatu pernyataan matematis. Mahasiswa yang memiliki kemampuan pembuktian matematis dapat membuktikan

kebenaran dari pernyataan matematika secara terstruktur berdasarkan definisi, prinsip serta teorema (Lestari, 2015). Kemampuan ini terdiri dari kemampuan dalam mengkontruksi bukti dan kemampuan memvalidasi bukti (Selden & Selden, 2003). Adapun indikator kemampuan pembuktian matematis yang dapat diukur, yaitu: 1) membaca pembuktian matematis; 2) melakukan pembuktian matematis secara langsung, tak langsung, atau dengan induksi matematis; dan 3) mengkritik pembuktian dengan menambah, mengurangi atau menyusun kembali suatu pembuktian matematis (Lestari, 2015). Peneliti merasa perlu untuk mengkaji profil kemampuan pembuktian matematis dari mahasiswa pada mata kuliah Aljabar Abstrak.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini termasuk dalam jenis penelitian deskriptif. Hal ini dikarenakan dalam penelitian ini bertujuan untuk mengungkap fenomena-fenomena yang ada serta dapat juga mengadakan kajian yang sifatnya kuantitatif, tidak terdapat perlakuan terhadap variabel-variabel yang diteliti dan menggambarkan kondisi variabel apa adanya (Sukmadinata & Nana Syaodih, 2010). Dalam penelitian ini peneliti menggambarkan profil kemampuan pemecahan masalah mahasiswa berdasarkan tingkat kemampuan tinggi, sedang dan rendah yang dilihat dari hasil tes kemampuan pembuktian matematis. Selanjutnya dilakukan wawancara kepada responden yang terpilih, untuk menggali informasi terkait kemampuan pembuktian matematis berdasarkan indikator kemampuan pembuktian matematis.

Subjek dari penelitian ini adalah mahasiswa semester 6 program studi Pendidikan Matematika STKIP Media Nusantara Citra yang mengambil mata kuliah Aljabar Abstrak pada semester Genap Tahun Akademik 2020/2021 yang berjumlah 11 orang. Sumber data dari penelitian ini terdiri atas hasil tes kemampuan pembuktian matematis dan hasil wawancara dari responden yang dipilih secara purposive sampling. Adapun pertimbangan dalam memilih responden adalah berdasarkan kriteria: masuk dalam kategori mahasiswa yang memiliki kemampuan tinggi, sedang dan menengah dan dapat bekerjasama dalam memberikan informasi terkait kajian penelitian.

Instrumen tes disusun mengacu pada materi yang ada pada mata kuliah Aljabar Abstrak dan mempertimbangkan kemunculan indikator kemampuan pembuktian matematis. Adapun indikator pembuktian matematis yang dilihat dalam penelitian ini adalah: 1) membaca pembuktian matematis, yang dapat dilihat dari bagaimana mahasiswa menuliskan kembalisoal ke dalam bentuk kalimat matematis, 2) Melakukan pembuktian matematis secara langsung, yang dapat dilihat dari bagaimana prosedur mahasiswa dalam melakukan

pembuktian matematis, dan 3) mengkritik pembuktian dengan menambah, mengurangi atau menyusun kembali suatu pembuktian matematis dapat dilihat dari bagaimana mahasiswa menyimpulkan Kembali dari pembuktian yang telah dilakukan.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Berikut ini adalah data nilai mahasiswa terkait materi Ring pada mata kuliah Aljabar Abstrak.

Tabel 1. Kemampuan Awal Mahasiswa pada Mata Kuliah Aljabar Abstrak

No	Nama Siswa	Nilai	Kelompok
1	A	73	Sedang
2	B	78	Sedang
3	C	94	Tinggi
4	D	90	Tinggi
5	E	65	Sedang
6	F	73	Sedang
7	G	76	Sedang
8	H	84	Tinggi
9	I	91	Tinggi
10	J	59	Rendah
11	K	80	Tinggi

Berdasarkan kategori tersebut, selanjutnya dipilih perwakilan dari setiap kategori masing masing satu orang. Selanjutnya dilakukan analisis terhadap jawaban dari mahasiswa tersebut.

1. Indikator Membaca Pembuktian Matematis

Kemunculan adanya indikator ini dapat dilihat dari kemampuan mahasiswa dalam membuat kalimat matematis dari soal yang diberikan. Soal yang diberikan adalah sebagai berikut:

“Misalkan Z himpunan bilangan bulat. Operasi biner \oplus dan \odot berturut-turut didefinisikan sebagai berikut, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \oplus b = a + b + 1$ dan $a \odot b = a + b + ab$. Tunjukkan bahwa Z merupakan ring komutatif! Kemudian periksa apakah Z merupakan ring dengan elemen satuan?”

Kemudian jawaban mahasiswa dari masing-masing kategori yang sesuai dengan indikator membaca pembuktian matematis dapat dilihat pada Gambar 2, Gambar 3 dan Gambar 4 berikut.

dik: $a, b \in \mathbb{Z}$
 $a \oplus b = a + b + 1$
 $a \odot b = a + b + ab$
 dit: Tunjukkan \mathbb{Z} merupakan ring komutatif, periksa apakah \mathbb{Z} merupakan ring dgn elemen satuan

Gambar 2. Jawaban Mahasiswa Kelompok Tinggi

> Dik: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$
 $a \oplus b = a + b + 1$
 $a \odot b = a + b + ab$
 dit: \mathbb{Z} ring komutatif & Periksa \mathbb{Z} ring dgn elemen satuan

Gambar 3. Jawaban Mahasiswa Kelompok Sedang

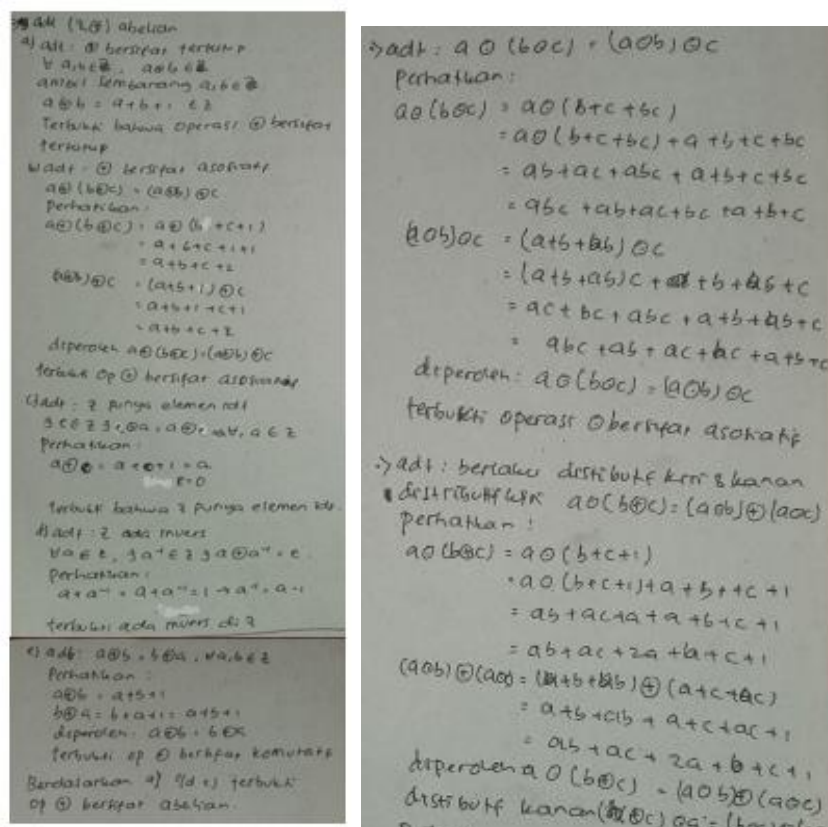
Penyelesaian:
 $\Rightarrow a \odot b = a + b + 1$
 $a \odot b = a + b + ab$
 Operasi: binner \oplus dan \odot untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$
 Tunjukkan \mathbb{Z} merupakan ring komutatif.

Gambar 4. Jawaban Mahasiswa Kelompok Rendah

Gambar 2, Gambar 3 dan Gambar 4 memperlihatkan bahwa mahasiswa pada masing-masing kelompok menuliskan dalam format yang berbeda-beda. Untuk mahasiswa kelompok tinggi dan kelompok sedang sudah dapat menuliskan kembali informasi yang ada pada soal secara lengkap, sedangkan untuk mahasiswa dengan kelompok rendah hanya menuliskan sebagian informasi pada soal, terutama pada pernyataan yang akan dibuktikan. Berdasarkan wawancara yang dilakukan oleh peneliti dengan mahasiswa kelompok rendah, disimpulkan bahwa mahasiswa terfokus pada pertanyaan pertama. Mahasiswa tersebut masih kurang memahami sifat sifat ring dengan elemen satuan.

2. Indikator Melakukan Pembuktian Matematis

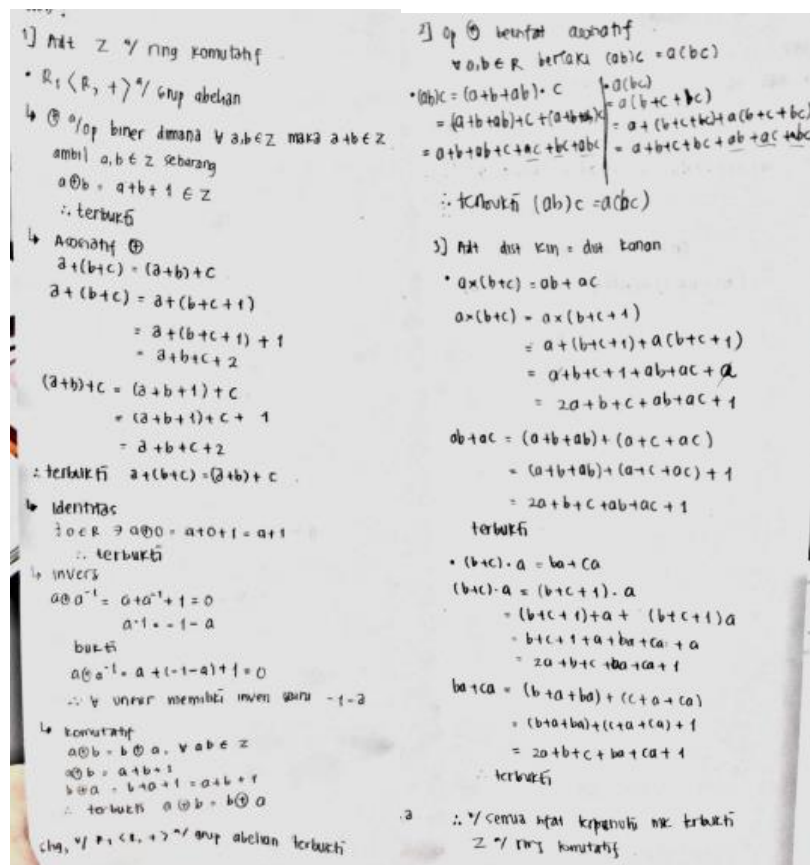
Pada indikator melakukan pembuktian matematis, untuk setiap kelompok tinggi dapat menjabarkan secara rinci pembuktian matematis. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 5.



Gambar 5. Pembuktian Matematis Mahasiswa Kelompok Tinggi

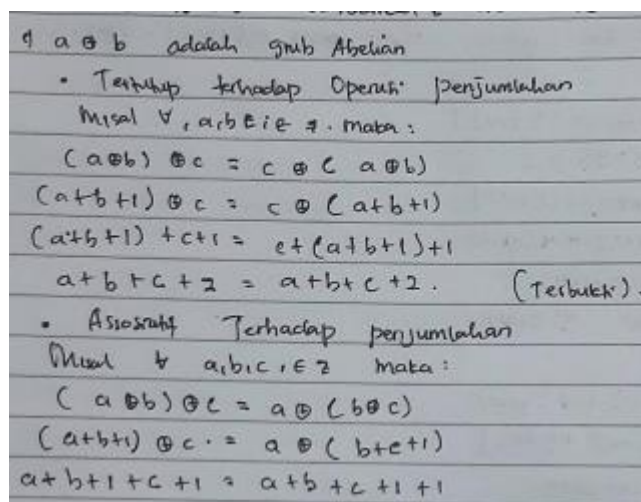
Gambar 5 memperlihatkan bahwa kelompok tinggi mampu menguraikan secara rinci hal pertama yang harus dibuktikan dari sebuah ring adalah merupakan Grup abelian terhadap operasi penjumlahan, selanjutnya hal yang harus dibuktikan adalah berlaku sifat asosiatif terhadap operasi perkalian, dan yang terakhir adalah berlaku sifat distributif kiri dan distributif kanan. Hal ini sesuai dengan definisi Ring, yaitu sebuah himpunan R dengan operasi penjumlahan dan perkalian, dikatakan sebuah ring apabila memenuhi sifat-sifat: 1) operasi penjumlahan bersifat komutatif, 2) operasi penjumlahan bersifat asosiatif, 3) memiliki elemen nol (elemen identitas terhadap operasi penjumlahan), 4) setiap unsur di R memiliki invers terhadap operasi penjumlahan, 5) operasi perkalian bersifat asosiatif, dan 6) berlaku hukum distributif perkalian terhadap penjumlahan (Gallian, 2017:227). Selanjutnya, untuk membuktikan ring komutatif adalah dengan membuktikan sifat komutatif pada operasi perkalian (Durbin, 2009:124). Mahasiswa pada kelompok tinggi juga sudah dapat menunjukkan hal tersebut.

Hal yang sama juga dilakukan oleh mahasiswa kelompok sedang. Mahasiswa sudah dapat membuktikan secara rinci pembuktian terkait ring komutatif. Seperti terlihat pada Gambar 6.



Gambar 6. Pembuktian Matematis Mahasiswa Kelompok Sedang

Pada Gambar 6 terlihat bahwa mahasiswa kelompok sedang sudah dapat melakukan pembuktian matematis secara rinci. Sementara untuk mahasiswa kelompok rendah, terdapat kekeliruan pada pembuktian tertutup terhadap operasi biner yang diberikan. Perhatikan Gambar 7 berikut ini:

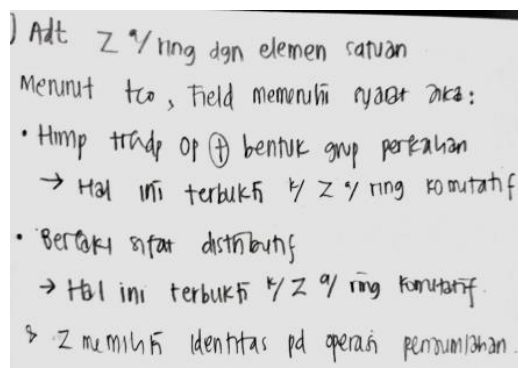


Gambar 7. Kekeliruan Pembuktian Matematis Mahasiswa Kelompok Rendah

Pada Gambar 7, terlihat bahwa tidak ada perbedaan cara membuktikan tertutup terhadap operasi penjumlahan dan pembuktian asosiatif terhadap operasi penjumlahan. Padahal

sebenarnya, dari operasi biner yang didefinisikan sudah dapat ditunjukkan bahwa pada operasi biner berlaku sifat tertutup, hal ini dikarenakan pada pernyataan “*untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \oplus b = a + b + 1$* ” sudah dapat disimpulkan bahwa operasi \oplus bersifat tertutup, karena 1 adalah bilangan bulat, dan pada bilangan bulat, untuk a dan b bilangan bulat, diperoleh $a + b + 1$ adalah bilangan bulat. Berdasarkan wawancara yang dilakukan, mahasiswa tersebut mengalami kesulitan dalam membuktikan sifat tertutup tersebut dikarenakan operasi biner yang diberikan menyangkut tiga bilangan.

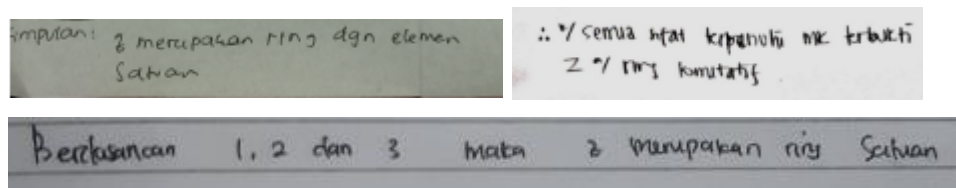
Untuk soal berikutnya yaitu memeriksa apakah grup tersebut adalah ring dengan unsur satuan, tidak ada satupun dari kelompok tersebut yang dapat menjawabnya dengan tepat. Hal ini dikarenakan mereka tidak dapat menentukan elemen satuan dari ring tersebut karena operasi perkalian yang didefinisikan menyulitkan mereka untuk mencari elemen satuan dari ring. Selain itu, mereka melupakan konsep tentang elemen satuan dari suatu ring. *A unity (or identity) in a ring is a nonzero element that is an identity under multiplication* (Gallian, 2017:228). Karna definisi dari operasi biner \odot pada soal adalah $a \odot b = a + b + ab$ maka tidak terdapat bilangan tak nol sedemikian sehingga $a \odot u = a$, dimana u adalah elemen satuan (*unity*). Hal ini dikarenakan $a \odot u = a + u + au = a$ hanya dipenuhi saat nilai $u = 0$. Sehingga disimpulkan \mathbb{Z} bukanlah ring dengan elemen satuan. Mahasiswa dari kelompok sedang mencoba menjawabnya dengan memberikan kesimpulan-kesimpulan dari langkah yang dilakukannya dalam pembuktian, seperti terlihat pada Gambar 8.



Gambar 8. Kekeliruan Jawaban Mahasiswa Kelompok Sedang

3. Indikator mengkritik pembuktian dengan menambah, mengurangi atau menyusun kembali suatu pembuktian matematis.

Pada indikator ini, semua dari ketiga kelompok tidak menyusun kembali bukti yang telah dikerjakan untuk menjadi sebuah pernyataan kesimpulan. Kesimpulan yang diberikan lebih kepada kalimat-kalimat singkat, seperti terlihat pada Gambar 9.



Gambar 9. Kesimpulan Jawaban Mahasiswa dari Tiap Kelompok.

Berdasarkan wawancara yang dilakukan, mereka beranggapan bahwa bukti yang sudah dilakukan pada langkah sebelumnya tidak perlu lagi dibuat pada bagian kesimpulan. Secara umum, kurangnya intensitas mahasiswa dalam melakukan pembuktian matematis menjadi permasalahan dalam mengembangkan kemampuan pembuktian matematis bagi mahasiswa, disamping masalah-masalah lainnya seperti kurangnya penguasaan konsep materi prasyarat dan terlalu banyaknya definisi dan teorema, sehingga mahasiswa merasa bingung menggunakan definisi dan teorema apa yang dipakai dalam membuktikan pernyataan matematis (Lestari, 2015).

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa mahasiswa dengan kemampuan tinggi dan sedang memiliki kemampuan membaca pembuktian matematis dan melakukan pembuktian matematis. Sedangkan untuk kemampuan mengkritik pembuktian dengan menambah, mengurangi atau menyusun kembali suatu pembuktian matematis untuk tiap kelompok mahasiswa masih belum nampak. Oleh karena itu, disarankan agar diberikan latihan dan pembiasaan dalam melakukan pembuktian matematis agar kemampuan pembuktian matematis mahasiswa dapat berkembang secara optimal.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

- Durbin, J. R. (2009). *Modern Algebra an Introduction* (6th-th ed.). USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Gallian, J. A. (2017). *Contemporary Abstract Algebra*. USA: Cengage Learning.
- Lestari, K. E. (2015). Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis Mahasiswa Menggunakan Pendekatan Induktif-Deduktif Pada Mata Kuliah Analisis Real. *MENDIDIK: Jurnal Kajian Pendidikan Dan Pengajaran*, 1(2), 128–135.
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4–36. <https://doi.org/10.2307/30034698>
- Sukmadinata, & Nana Syaodih. (2010). *Metode Penelitian Pendidikan*. UPI Press.